Prof. Dr. Alfred Toth

Selbsteinbettende Relationen

1. Selbsteinbettung ist Selbstreflexion, insofern das zu definierende Element in seiner Definition selbst wieder auftaucht. Hierfür muß das Fundierungsaxiom der Zermelo-Fraenkelschen Mengentheorie außer Kraft gesetzt und durch ein "Antifundierungsaxion" (AFA, vgl. Aczel 1988) ersetzt werden. Dieses in der Semiotik nie behandelte AFA dürfte jedoch die zentrale mengentheoretische Relation sein, denn Bense (1979, S. 53 u. 67) definierte das Zeichen, das von Peirce als simple lineare triadische Relation

$Z = (1, 2, 3)$

eingeführt worden war, ausdrücklich als "Relation über Relationen" bzw. als "verschachtelte Relation"

$Z = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))),$

gestützt darauf, daß das Zeichen eine triadische Relation über der monadischen Relation 1, der dyadischen Relation 2 und der triadischen Relation 3 darstellt

$Z^3 = (1^1 \subset 2^2. \subset 3^3).$

Das triadische Zeichen enthält sich somit selbst im triadischen Interpretantenbezug, was die Autoreproduktion des Zeichens ermöglicht (vgl. Buczynska-Garewicz 1976). Die Semiotik wird nach Bense dadurch zu einer "Theorie gradativer Relationalität"(vgl. Toth 2019), d.h. eine semiotische Relation zeichnet sich unter anderen Relationen dadurch aus, daß sie gradativ sind.

2. Im folgenden gehen wir von den AFA-Stemma von n = 0 bis n = 3 aus (vgl. Aczel 1988, S. 3)

Zur Erläuterung vgl. man die Äquivalenz der Stemmata für n = 2 und n = 3 mit den folgenden Graphen.

2

3

2. Wenn wir also von

Z = (M → ((M → O) → (M → O → I))).

ausgehen, können wir setzen

Z = c

M = a

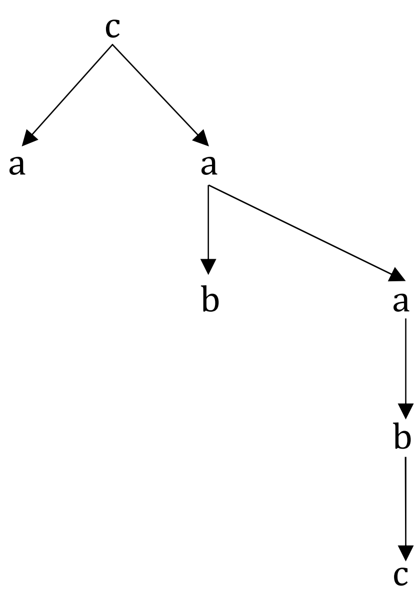
(M → O) = b

(M → O → I) = Z = c,

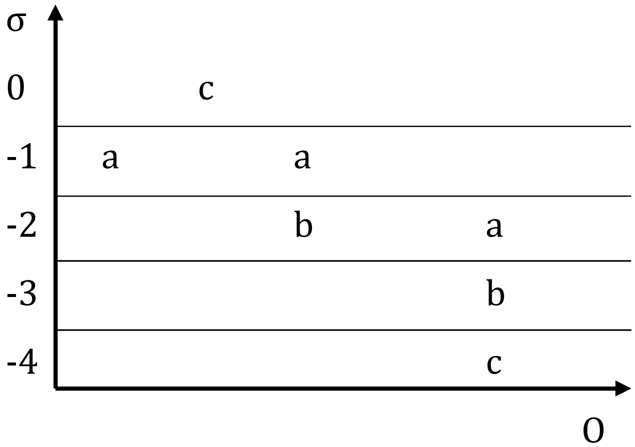
bekommen

c = (a → (b → c))

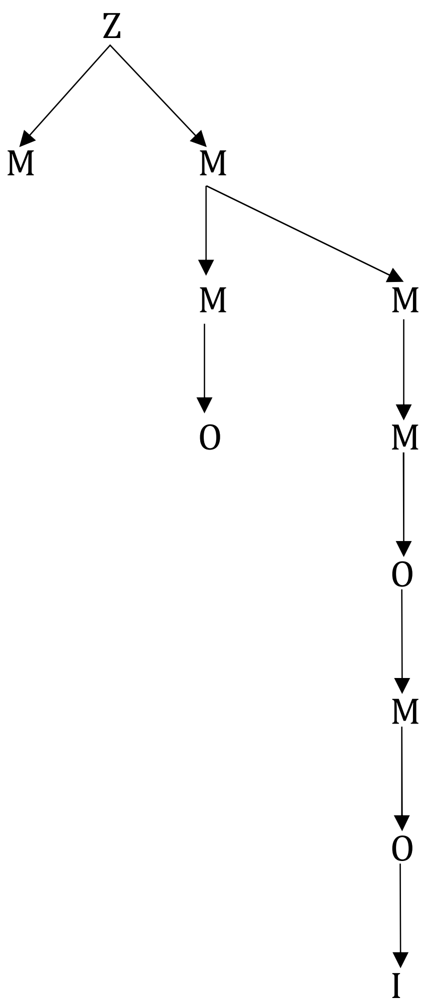
und vermöge damit das folgende AFA-Stemma



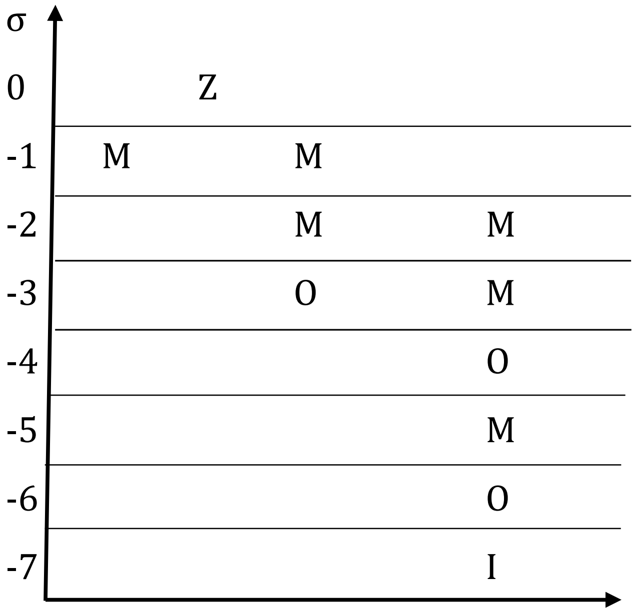
Damit enthält Z also 5 Stufen, die wir in dem folgenden Diagramm darstellen können, dessen Achsen aus der Ordnung O und dem Einbettungsgrad σ bestehen.



Setzen wir wieder die Relationen für a, b und c ein, so erhalten wir



und das dazu gehörige O/σDiagramm.



O,

das nun also 8-stufig ist.

3. Die Zahlenfolge

F = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...)

ist bekannt (OEIS A002260). Daneben gibt es aber, wie wir im folgenden zeigen wollen, mindestens zwei weitere Haupttypen von selbstenthaltenden Relationen, die, da sie gradativ-relational sind, ebenfalls semiotisch relevant sind. Der 1. Einbettungstyp entspricht der angegebenen OEIS-Folge. Beim 2. Einbettungstyp wird nicht mehr bei jeder Teilfolge von neuem gezählt, sondern erst von der 2., 3, ..., (n-1)ten Abbildung her. Beim 3. Einbettungstyp wird immer von der 1. Abbildung her neu gezählt. Der 2. Einbettungstyp vermittelt daher zwischen dem 1. und dem 3. Einbettungstyp.

3.1. Einbettungstyp für n = 4

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[d] & & \\
& 2 \arrow[r] & 1 \arrow[d] & \\
& & 2 \arrow[d] & \\
& & 3 \arrow[r] & 1 \arrow[d] \\
& & & 2 \arrow[d] \\
& & & 3 \arrow[d] \\
& & & 4
\end{tikzcd}
$$

2. Einbettungstyp für n = 4

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[d] & & \\
& 2 \arrow[r] & 1 \arrow[d] & \\
& & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
& & 3 & 2 \arrow[d] \\
& & & 3 \arrow[d] \\
& & & 4
\end{tikzcd}$$

3. Einbettungstyp für n = 4

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
& 2 & 2 \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\
& & 3 & 3 \arrow[d] \\
& & & 4
\end{tikzcd}$$

Wie man leicht sieht, sind der 2. und der 3. Einbettungstyp nicht mehr linear als OEIS-Folgen darstellbar, d.h. sie setzen notwendig ein 2-dimensionales Zahlenfeld voraus.

Literatur

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Buczynska-Garewicz, Hanna, Der Interpretant, die Autoreproduktion des Symbols und die pragmatische Maxime. In: Semiosis 2, 1976, S. 10-17

Toth, Alfred, Semiotik als Theorie gradativer Relationalität. Tucson, AZ, 2019

18.9.2019